**ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**
**ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE DE LA MÉTALLURGIE ET DE L'INDUSTRIE DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE**
**ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)**

Options M, P', TA **EPREUVE PRATIQUE DE MATHÉMATIQUES** (2 h) 1982

On sait qu'on peut "paver" le plan euclidien par des polygones réguliers convexes, deux à deux isométriques ; le paver, c'est-à-dire le recouvrir (tout point du plan appartient à au moins un polygone), mais sans empiètement : un point commun à deux polygones, appartient nécessairement à leurs frontières. Toutefois ceci n'est possible que si ces polygones sont : des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones. De la même manière, on peut paver l'espace euclidien à trois dimensions avec des cubes. Or, on démontre - et on admettra dans toute la suite - qu'il n'y a que cinq types de polyèdres réguliers convexes :

- les tétraèdres réguliers : un tel tétraèdre a 4 sommets, 6 arêtes, 4 faces ; chacune d'elles est un triangle équilatéral (figure n° 1).
- les cubes : un cube a 8 sommets, 8 arêtes, 6 faces (qui sont des carrés) (figure n° 2).
- les octaèdres : un octaèdre a 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces ; chaque face est un triangle équilatéral ; les centres des faces d'un cube sont les sommets d'un octaèdre régulier ; les centres des faces d'un octaèdre régulier sont les sommets d'un cube (figure n° 3).
- les dodécaèdres : un tel polyèdre a 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces ; chacune d'elles est un pentagone régulier convexe. (figures n° 4 et n° 6).
- les icosaèdres : un tel polyèdre a 12 sommets, 30 arêtes et 20 faces, chacune d'elles est un triangle équilatéral ; les extrémités des cinq arêtes issues d'un sommet sont les cinq sommets d'un pentagone régulier convexe. (figures n° 5 et n° 7).

Cela posé :

. dans la partie A, on établira des résultats utiles pour la suite ;

. dans la partie B, on cherchera si l'espace peut être pavé par des polyèdres réguliers convexes, deux à deux isométriques, autres que des cubes ;

. enfin, $\pi_n$ étant un polygone régulier convexe de n côtés, on sait exprimer en fonction de n le rapport $r_n = \frac{\ell_n^2}{s_n}$ du carré du périmètre de ce polygone à l'aire qu'il limite. Dans un esprit de généralisation, on demande, dans la partie C un calcul analogue pour les aires et volumes attachés à un polyèdre régulier de l'espace.

## partie A

1° - Soient, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, trois demi-droites Ox, Oy, Oz non coplanaires, issues d'un même point O ; on désigne par $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ leurs trois vecteurs unitaires et on pose :

$a = \text{Arccos}\ (\vec{j}.\vec{k})$, $b = \text{Arccos}\ (\vec{k}.\vec{i})$, $c = \text{Arccos}\ (\vec{i}.\vec{j})$ ; les deux formules

$\vec{j} = \vec{i}\cos c + \vec{u}\sin c$ et $\vec{k} = \vec{i}\cos b + \vec{v}\sin b$ définissent deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ; soit $\alpha = \text{Arccos}\ (\vec{u}.\vec{v})$

a) vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires et orthogonaux à $\vec{i}$ ; quelle est la signification géométrique de $\alpha$ pour les deux demi-plans limités à la droite qui porte Ox et qui contiennent respectivement les deux demi droites Oy et Oz ?

b) démontrer la formule (dite formule fondamentale de la trigonométrie sphérique) :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

2° - Trouver les modules et arguments des racines de l'équation, sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, $z^5 - 1 = 0$.

Donner des expressions exactes de $\cos \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$ en résolvant d'une autre manière cette même question.

Indication - Après avoir éliminé la racine évidente, former l'équation vérifiée par l'inconnue auxiliaire $Z = z + \frac{1}{z}$. Vérifier les résultats obtenus à l'aide d'une calculatrice de poche ou d'une table.

## partie B

Soit P un polyèdre convexe ; deux faces adjacentes, c'est-à-dire limitées à une même arête commune, forment un angle dièdre dont la valeur, $\theta$, ne dépend que du type de polyèdre régulier considéré ($0 < \theta < \pi$) ; pour un cube $\theta$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

1° - Soit P un tétraèdre régulier de sommets ABCD (figure n° 1) ; soit $\theta_t$ l'angle dièdre de deux faces, par exemple des faces ABC et ABD ; calculer $\cos \theta_t$ et vérifier que le nombre $h_t$ défini par $\theta_t = \frac{2\pi}{h_t}$

.../...

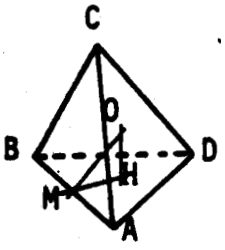



Fig.1 Vue d'un tétraèdre régulier

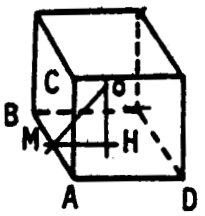



Fig.2 Vue d'un cube

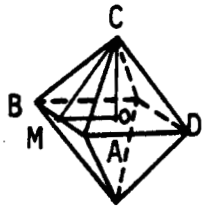



Fig.3 Vue d'un octaèdre régulier

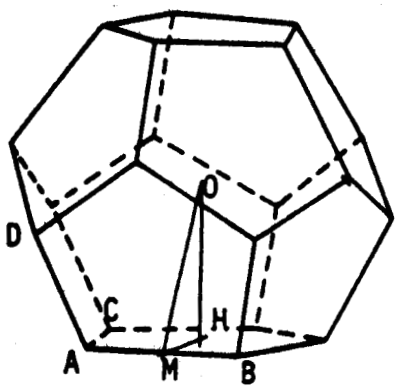



Fig.4 Vue d'un dodécaèdre régulier

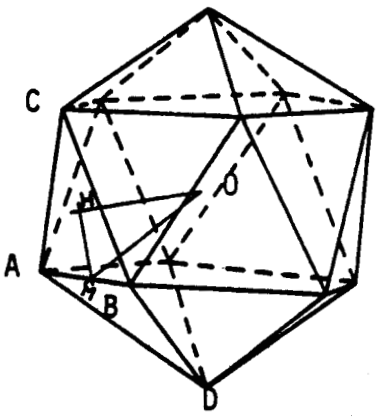
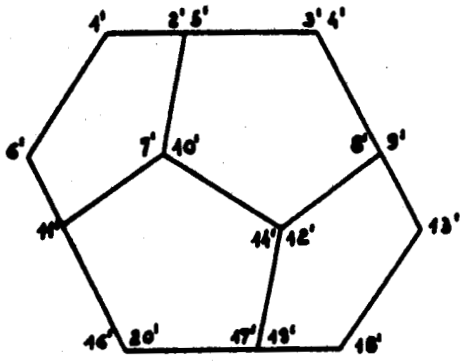



Fig.5 Vue d'un icosaèdre régulier convexe



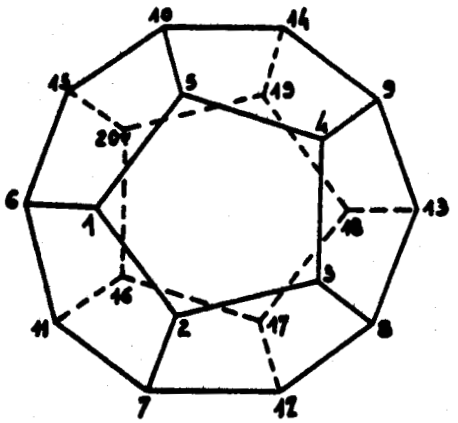
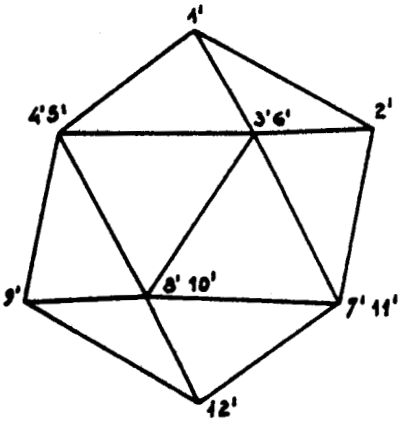




Fig.6 Vue d'un dodécaèdre régulier



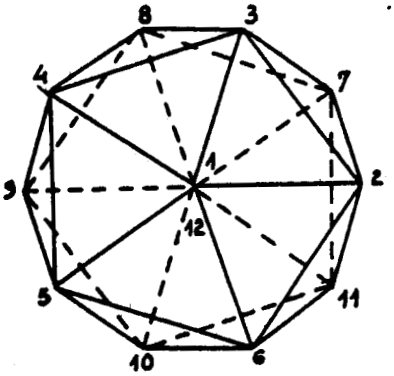




Fig.7 Epure d'un icosaèdre régulier convexe

.../...

n'est pas entier ; il existe donc (et on le démontrera sans avoir à calculer numériquement $h_t$, à l'aide de tables ou autrement) un entier $k_t$, tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_t+1} < \theta_t < \frac{2\pi}{k_t}$ ; donner $k_t$ .

2° - De même, si P est un octaèdre régulier, deux faces adjacentes forment un angle dièdre $\theta_\omega$ ; calculer cos $\theta_\omega$ et en déduire l'existence et la valeur d'un entier $k_\omega$ , tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_\omega+1} < \theta_\omega < \frac{2\pi}{k_\omega}$ .

3° - P étant un dodécaèdre, deux faces adjacentes forment un angle dièdre qu'on note $\theta_\delta$ ; calculer cos $\theta_\delta$ et en déduire l'existence et la valeur d'un entier $k_\delta$ tel que soit vérifiée l'inégalité stricte

$$\frac{2\pi}{k_\delta+1} < \theta_\delta < \frac{2\pi}{k_\delta} .$$

4° - Enfin P étant un icosaèdre régulier convexe, deux faces ajacentes, les faces ABC et ABD de la figure, par exemple, forment un angle dièdre qu'on note $\theta_i$ ; calculer cos $\theta_i$ et en déduire l'existence et la valeur d'un entier $k_i$ tel que soit vérifiée l'inégalité stricte $\frac{2\pi}{k_i+1} < \theta_i < \frac{2\pi}{k_i}$ .

5° - Que déduire des résultats précédents sur la possibilité ou l'impossibilité de paver l'espace à trois dimensions par des polyèdres réguliers autres que des cubes ?

## partie C

P étant un polyèdre régulier convexe, on désigne par $\sigma_p$ sa surface extérieure, par $v_p$, le volume du domaine qu'il limite ; le nombre $\rho_p = \frac{\sigma_p^3}{v_p^2}$ ne dépend que du type de P ; on en donnera des valeurs approchées à $10^{-3}$ près dans ce qui suit :

1°) P étant un tétraèdre régulier t, d'arête a, calculer les nombres $\sigma_t$ et $v_t$, ainsi que le rapport $\rho_t = \frac{\sigma_t^3}{v_t^2}$ et une valeur approchée de celui-ci.

2°) P étant un cube, calculer le rapport $\rho_c$ correspondant

3°) P étant un octaèdre régulier, calculer, en fonction de la longueur a de son arête, les nombres $\sigma_\omega$ et $v_\omega$ ; en déduire le rapport $\rho_\omega$ et une valeur approchée de celui-ci.

4°) On admet que, pour un dodécaèdre régulier, le rapport $\rho_\delta$ correspondant a pour valeur $270\sqrt{130 - 58\sqrt{5}}$ ; en donner une valeur approchée.

5°) On admet que, pour un icosaèdre régulier, le rapport correspondant est $\rho_i = 270\,(7\sqrt{3} - 3\sqrt{15})$ en donner une valeur approchée.

6°) On considère une sphère et son aire $\sigma_S$ ; soit $v_S$ le volume de la boule qu'elle limite ; calculer le rapport $\rho_S = \frac{\sigma_S^3}{v_S^2}$ .

7°) Comparer les six nombres précédents entre eux, et, en ce qui concerne les cinq polyèdres, les comparer aux nombres de leurs faces.

8°) P étant un dodécaèdre d'arête a, la distance OH de son centre au plan d'une face est donnée par $OH = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} \operatorname{tg} \frac{\theta_\delta}{2}$ .

De même, si P est un icosaèdre régulier convexe dont les arêtes ont pour longueur a, la distance de son centre O au plan de l'une des faces est donnée par $OH = \frac{a\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg} \frac{\theta i}{2}$ .

Démontrer l'une de ces deux formules et l'utiliser pour démontrer l'un des résultats admis au 4° ou au 5°.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail